Ισχυρό Θεώρημα Bezout (~1850)

Αν δύο καμπύλες $V(F), V(G)$ βαθμών m, n αντίστοιχα του προβολικού μιγαδικού επιπέδου δεν έχουν κοινή συνιστώσα, τότε $\sum I_p(F,G) = m \cdot n$, όπου I: συντελεστής τομής και $P \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

23/05/17

Ασκ: Βρείτε τα ιδιόμορφα σημεία της: (i) $V(x^2+xy+xz)$
(ii) $V(x^2+2xy+y^2+z^2+2xz+2yz)$.

Λύση: (i) $f = x^2+xy+xz$.

Θέλω $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial y}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x+y+z = 0 \\ \left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial y} = x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x=0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y+z=0 \\ x=0 \end{array}\right. \rightarrow (0,-1,1)$$

άπειρα σημεία με $y=-z$.

(ii) $Q = x^2+2xy+y^2+z^2+2xz+2yz$

Θέλω $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= 2x+2y+2z=0\\
\frac{\partial Q}{\partial y} &= 2x+2y+2z=0\\
\frac{\partial Q}{\partial z} &= 2x+2y+2z=0
\end{aligned}\right\}$$

Τα ιδιόμορφα σημεία είναι η ευθεία $V(x+y+z)$

Για την (i): $V(x^2+xy+xz) = V(x(x+y+z)) =$
$= \underbrace{V(x) \cup V(x+y+z)}_{\text{ένωση 2 ευθειών.}}$

Ενώ για την (ii) $V(\ ) = V((x+y+z)^2)$
$\downarrow$
ευθεία που επαναλαμβάνεται 2 φορές.

Συμπέρασμα:

Άρα μια β-βάθμια έχει ιδιόμορφο σημείο αν-ν είναι ένωση 2 ευθειών (α-βαθμίων).

$Q = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 xy + \alpha_3 y^2 + \alpha_4 xz + \alpha_5 yz + \alpha_6 z^2$
(Γενική μορφή 2-βάθμιας)

Πότε η Q έχει ιδιόμορφο σημείο; (δεν είναι ανάγωγη δηλ. είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων)

— Θέλω $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 2\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_4 z = 0$

$\frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 x + 2\alpha_3 y + \alpha_5 z = 0$

$\frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow \alpha_4 x + \alpha_5 y + 2\alpha_6 z = 0$

(Θέλω να μην είναι σύστημα Cramer).

Άρα η Q έχει ιδιόμορφο σημείο $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\begin{vmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & 2\alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & 2\alpha_6 \end{vmatrix}}_{\text{Εσσιανή } H_Q \text{ της } Q} = 0$

ή

Q δεν είναι ανάγωγη $\Leftrightarrow |\ \ | = 0$

και $\alpha_i \neq 0$ για κάποιο i.

$Q = \ldots \longrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$ (δηλ. αν μου δώσουν τα α_i μπορώ να περιγράψω την Q)

$$\underbrace{(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_6)}_{P^5_{\mathbb{C}}}, \ \lambda \neq 0.$$

$P^5_{\mathbb{C}}$ (5-διάστατος προβ. χώρος)

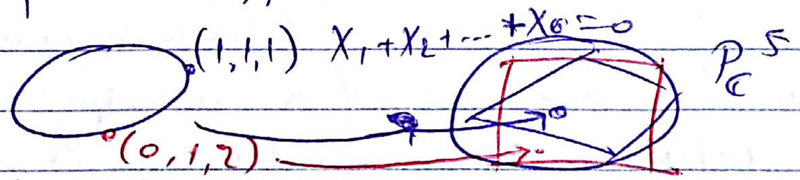
Δηλαδή υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ μιας β-βάθμιας καμπύλης του προβ. χώρου και σημείων του $P^5_{\mathbb{C}}$.

Αν βάλω τα α_i με x_i, $\forall i$ τότε πρέπει $|\ \ | = 0 \iff$

$$\iff 8x_1x_3x_6 + 2x_2x_4x_5 + 2x_3x_4^2 - 2x_1x_5^2 - 2x_6x_2^2 = 0.$$

- Βρείτε όλες τις δευτεροβάθμιες καμπύλες που διέρχονται από το σημείο $(1,1,1)$ και $(0,1,2)$.

Λύση: Βάζω στην Q (όπως παραπάνω) το σημείο $(1,1,1)$ και πρέπει $Q(1,1,1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 0$.



και $Q(0,1,2) = 0 \Rightarrow \alpha_3 + 2\alpha_5 + 4\alpha_6 = 0$

Όλες οι β-βάθμιες που περνούν και απ' το $(0,1,2)$ ανήκουν πάλι σ' ένα υπερ-επίπεδο διάστασης 4 στον $P^5_{\mathbb{C}}$ που αντιστοιχούν στα σημεία που ικανοποιούν την $x_3 + 2x_5 + 4x_6 = 0$

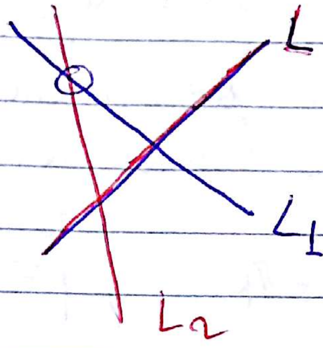
"Γενικά" 5 σημεία καθορίζουν μια δευτεροβάθμια καμπύλη.

Έτσι μια β-βάθμια που διέρχεται απ' τα (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \ldots, 5$ έχει τύπο:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & xz & yz & z^2 \\ x_1 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1z_1 & y_1z_1 & z_1^2 \\ & & \vdots & & & \\ x_5 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5z_5 & y_5z_5 & z_5^2 \end{vmatrix} = 0$$

6x6 ορίζουσα

Έστω $V(Q_1)$ κ' $V(Q_2)$ διέρχονται από 5 διαφορετικά σημεία $(x_i; y_i; z_i)$, $i=1,\dots,5$.
Από ασθενές Θεώρημα Bezout: οι $V(Q_1)$, $V(Q_2)$ έχουν κοινή συνιστώσα. Άρα $Q_1 = L\cdot L_1$ και $Q_2 = L\cdot L_2$



→ Τουλ. τα 4 (μπορεί και τα 5) να είναι στην ίδια ευθεία.

Άρα οι 5-άδες που δεν ορίζουν 2-βάθμια είναι αυτές για τις οποίες τα τουλ. 4 σημεία βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Έστω $V(F)$ κυβική άρα:

$$F = \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 y + \alpha_3 x^2 z + \alpha_4 x y^2 + \alpha_5 xyz + \alpha_6 x z^2 + \alpha_7 y^3 + \alpha_8 y^2 z + \alpha_9 y z^2 + \alpha_{10} z^3$$

Άρα μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ κυβικής $\leftrightarrow$ σημεία του 9-διάστατου προβολικού χώρου P_K^9
Άρα 9 σημεία καθορίζουν μια τριτο-βάθμια.
Οι καμπύλες του προβ. επιπέδου P_K^2 βαθμού d σχηματίζουν έναν προβολικό P_K

πλήθος μονονύμων βαθμού d − ένα (επειδή είμαι σε προβολικό χώρο)

Πλήθος μονονύμων βαθμού d στις μεταβλητές x, y, z:

$x^a y^b z^c \longleftrightarrow (1,1,\dots,1,0,1,\dots,1,0,1,\dots,1)$

με $a+b+c = d$ $d+2$ αριθμούς

a-άσσους. b-άσσους c-άσσους.

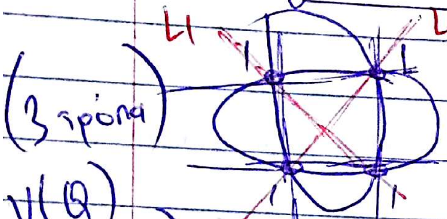
π.χ. $(0,0,1,\dots,1)$
$\downarrow$
z^d (γιατί έχω 0 x, 0 y).

Άρα ουσιαστικά διάλεξα $\binom{d+2}{2}$

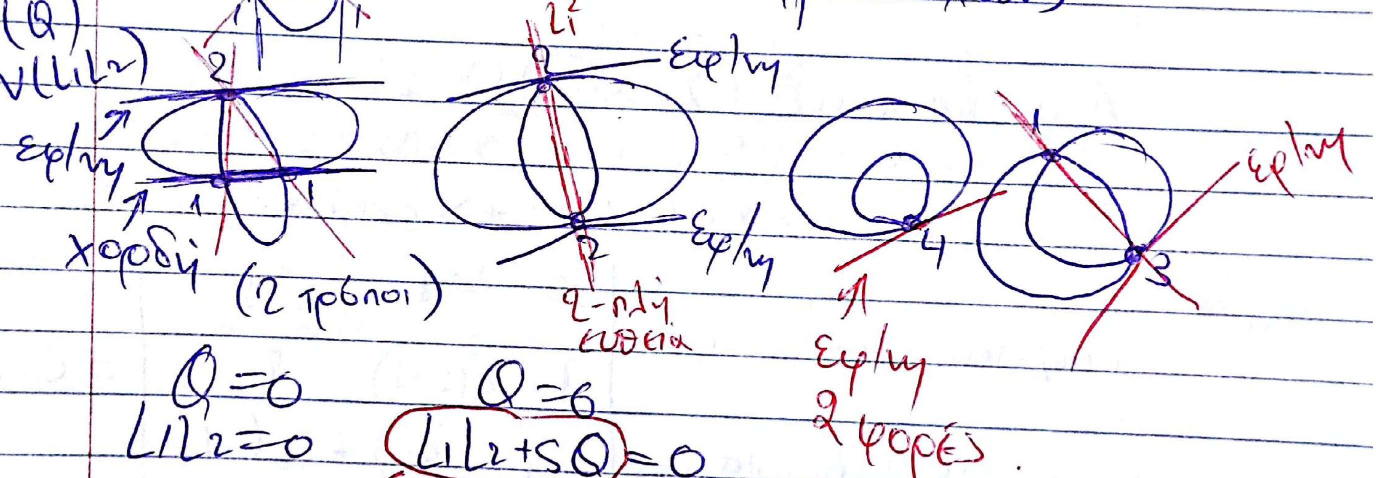
Δηλαδή P_k^N, με $N=\binom{d+2}{2}-1=\frac{(d+2)!}{2!\,d!}-1=$
$$=\frac{(d+2)(d+1)}{2}-1=\frac{d(d+3)}{2}$$

Δηλ. οι καμπύλες βαθμού d σχηματίζουν προβολικό χώρο διάστασης $\frac{d(d+3)}{2}$.

Ισχυρό Θεώρημα Bezout



2 2-βάθμιες ανάγωγες.
Πόσα κοινά σημεία έχουν;



$Q=0$ $\qquad$ $Q=0$

$L_1L_2=0$ $\qquad$ $L_1L_2+sQ=0$.

πολ/μο βαθμού το πολύ 3 ως προς s.

Θα βρω κατάλληλο $s\in\mathbb{C}$ ώστε η L_1L_2+sQ να είναι ανάγωγη. (Θέλω να μην μηδενίζεται)

Π.χ.: Βρείτε μια ανάγωγη κωνική που τέμνει την κωνική $V(x^2+y^2-z^2)$ στα $(1,0,1)$ με πολ/τα τομής 1 και $(0,1,1)$ με πολ/τα τομής 3.

Λύση: $Q=x^2+y^2-z^2$: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=z-x-y \longrightarrow$

Είναι στην περίπτωση

1

3

άρα $L_1 = z - x - y$

Για την L_2: $\frac{\partial Q}{\partial x}(0,1,1) + \frac{\partial Q}{\partial y}(0,1,1) + \frac{\partial Q}{\partial z}(0,1,1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x\Big|_{(0,1,1)} + 2y\Big|_{(0,1,1)} + (-2z)\Big|_{(0,1,1)} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow L_2 = 2y - 2z = y - z$

$Q = 0$ (ισοδ. συστήματα) $Q = 0$

$L_1 L_2 + SQ = 0 \Longleftrightarrow L_1 L_2 = 0$

Θέλω S ώστε $L_1 L_2 + SQ$ να είναι ανάγωγη.

Άρα $(z - x - y)(y - z) + S(x^2 + y^2 - z^2) =$

$= zy - z^2 - xy + xz - y^2 + yz + Sx^2 + Sy^2 - Sz^2 =$

$= Sx^2 - xy + (S-1)y^2 + xz + 2yz - (S+1)z^2$

Επομένως πρέπει η: $\begin{vmatrix} 2S & -1 & 1 \\ -1 & 2(S-1) & 2 \\ 1 & 2 & -2(S+1) \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$

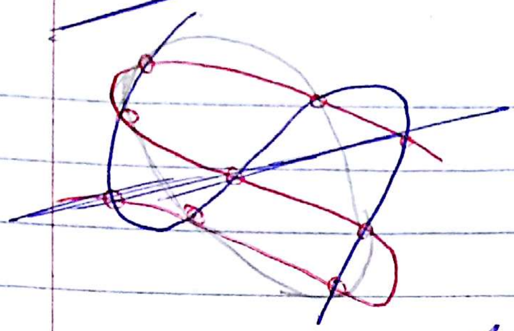
ώστε $L_1 L_2 + SQ$ να είναι ανάγωγη.

$\Rightarrow S^3 \neq 0$

Άρα κάθε $S \neq 0$ μας δίνει ότι $L_1 L_2 + SQ$ είναι ανάγωγη.

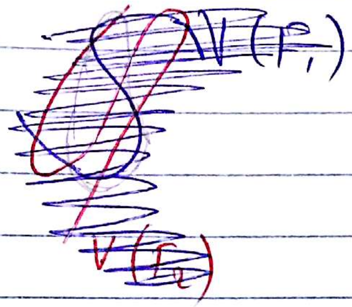
Θεώρημα: Αν δύο καμπύλες βαθμού n τέμνονται σε n^2 διαφορετικά σημεία και ακριβώς $m \cdot n$ από αυτά βρίσκονται σε μία ανάγωγη καμπύλη βαθμού m τότε τα υπόλοιπα $n(n-m)$ βρίσκονται πάνω σε μια καμπύλη βαθμού $n-m$.

Π.χ.



2 : γ-βάθμιες έχουν 9 κοινά σημεία και μια β-βάθμια περιέχει τα 6. Τότε τα άλλα 3 βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

~~$V(F_1)$ και $V(F_2)$ δύο καμπύλες βαθμού n~~



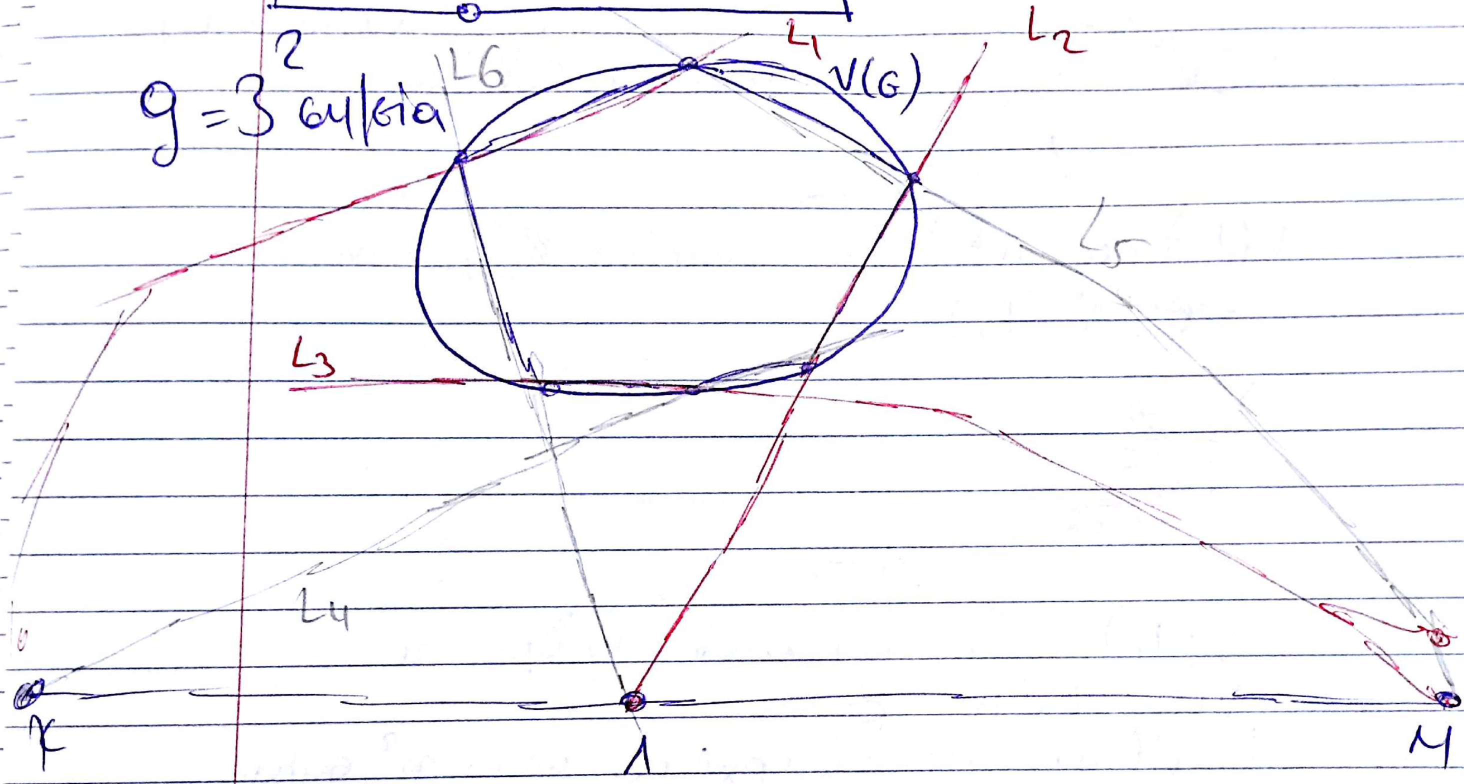
$V(f_1), V(F_2)$ 2 καμπύλες βαθμού n.
$V(G)$ βαθμού m.
Η $V(\lambda F_1+\mu F_2)$ διέρχεται απ' τα n^2 σημεία.
Μπορώ να βρω κατάλληλα λ,μ ώστε η καμπύλη $\lambda F_1+\mu F_2$ να διέρχεται από οποιοδήποτε σημείο P θέλω.
Για $\lambda=F_2(P)$, $\mu=-F_1(P)$ θα έχω $V(F_2(P)F_1(P)-F_1(P)F_2(P))=0$ που ισχύει//

Έστω $v\in V(G)$ διαφορετικό απ' τα n^2 σημεία.
Κοιτάζω σημ. τομής της $V(G)$ με την $V(F_2(P)F_1-F_1(P)F_2)$
Τότε αυτά είναι $n\cdot m+1$ (γινόμενο βαθμών $+1$ που διάλεξα).

m-βαθμού $\qquad$ n-βαθμού.

Άρα από ασθενές Θ. Bezout $\Rightarrow$ $V(G)$ και $V(\lambda F_1+\mu F_2)$ έχουν κοινή συνιστώσα.
Όμως $V(G)$ ανάγωγο δηλ έχει μία συνιστώσα και άρα η κοινή συνιστώσα είναι η $V(G)$.
Άρα $\lambda F_1+\mu F_2 = GH$, H πολυώνυμο βαθμού $n-m$.
Άρα $\underbrace{V(\lambda F_1+\mu F_2)}_{\text{ανήκουν τα } n^2} = \underbrace{V(G)}_{\text{ανήκουν τα } n\cdot m}\cup\underbrace{V(H)}_{\text{ανήκουν τα } n(n-m)}$

ΘΕΩΡΗΜΑ PASCAL



$F_1 = L_1 L_2 L_3$ || $V(G)$: 2-βάθμια : 3 σημεία
$F_2 = L_4 L_5 L_6$ || ανήκουν στην $V(G)$ άρα τα
υπόλοιπα 3 δηλ τα Κ, Λ, Μ ανήκουν σε μια
καμπύλη βαθμού $n - m = 3 - 2 = 1$
δηλ τα Κ, Λ, Μ είναι συνευθειακά.